Paris  1772

Les nombres négatifs


D'Alembert


Diderot

Nous sommes en 1772, à la fin du *siècle des Lumières*, ce siècle que tant d'hommes et de femmes ont éclairé de leur intelligence.
Denis Diderot vient de publier la *Grande Encyclopédie*, qui tente de réunir toutes les connaissances de son temps : 35 énormes volumes, dont 2 de tables et 12 de magnifiques planches d'illustrations.
Dans le *salon* que tient tous les soirs Julie de Lespinasse, il a voulu revoir Jean Le Rond d'Alembert, à qui il avait confié le soin de réunir les articles relatifs aux mathématiques. Ils sont en train de feuilleter l'un des nombreux articles que d'Alembert avait écrit lui-même : celui qui traite des nombres négatifs.
— Ces nombres sont bien ennuyeux pour les pédagogues que nous voulons être, disait Diderot, je n'ai jamais bien su quelle réalité on pouvait leur accorder.
Que pensez-vous, par exemple, de ceux qui nous disent que les nombres négatifs sont inférieurs au nombre zéro ?
— Mais, enfin, lui répondit d'Alembert, zéro est le plus petit des nombres possibles : comment pourrait-il exister quelque chose de plus petit que zéro ? L'importance d'une quantité se mesure par un nombre positif qui, par nature, est plus grand que zéro. *Dire que la quantité négative est au-dessous du rien est une chose qui ne se peut pas concevoir*.
Et, si vous voulez bien me prêter quelque attention, je puis vous démontrer tout à l'heure pourquoi cette idée n'est pas juste !

Pour comprendre le sel de cette conversation, il vous faut lire ce qui suit ; aujourd'hui, dans les mathématiques avec lesquelles nous calculons, les nombres négatifs sont inférieurs à 0.
D'Alembert avait donc plutôt tort ; comme quoi, même les meilleurs peuvent se tromper…
Mais l'erreur est une chose bien naturelle, et souvent c'est même une chose très utile : en la discutant et en étudiant les arguments qu'elle utilise, elle permet toujours de progresser vers la vérité.

Une mauvaise idée

Voici comment d'Alembert montrait que le nombre (– 1) ne pouvait pas être plus petit que 0 :
Comme tous les mathématiciens de son temps, il était absolument certain de la vérité des trois propriétés suivantes :

• La règle des signes :
Le produit (– 1) × (– 1) est égal à 1.

• La propriété des produits en croix :

Écrire $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à écrire $a \times d = c \times b$.

• La propriété des parts égales :

Si les deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égales,

alors les numérateurs et les dénominateurs se rangent dans le même ordre
(c'est-à-dire que : si $a < c$, c'est que $b < d$).

Et d'Alembert disait alors ceci : d'après la règle des signes, (– 1) × (– 1) = 1 × 1, alors d'après la propriété des produits en croix, c'est que

$$\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}.$$

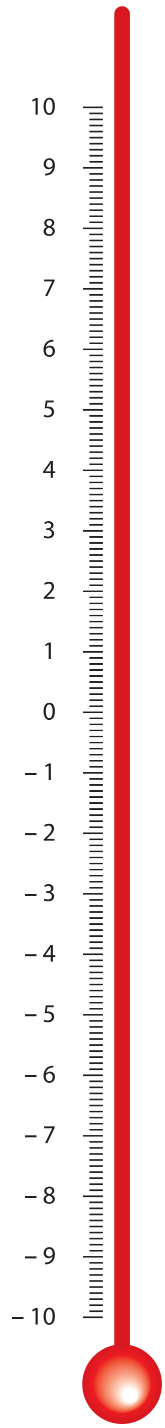
Si – 1 était plus petit que 0, *a fortiori* – 1 serait plus petit que 1. Mais alors, d'après la propriété des parts égales, 1 serait plus petit que – 1.
On est donc en pleine contradiction ; et l'idée que – 1 serait plus petit que 0 « n'est donc pas juste ».

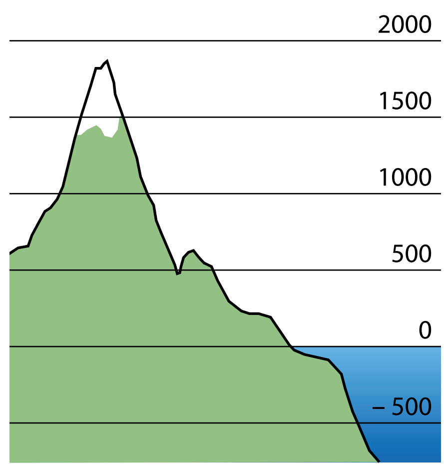
? 18

Saurais-tu trouver ce qui *cloche* dans l'argumentation de d'Alembert ? Laquelle des trois propriétés citées est, en fait, fausse ?

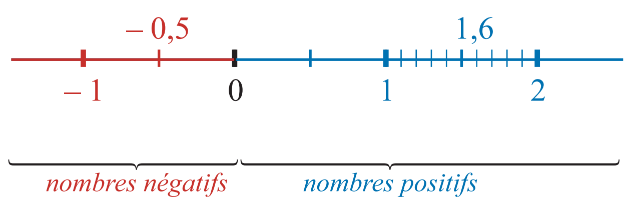
La bonne idée

On a longtemps pensé qu'une quantité ne pouvait être mesurée que par un nombre positif.
C'est évidemment vrai pour des kilos de pommes de terre ou des distances à parcourir.
Mais certaines choses peuvent être naturellement repérées par des nombres négatifs : l'altitude, par exemple, ou la température en degré Celsius.





Une bonne idée consiste à se servir des nombres pour repérer les points d'une droite : une fois choisies un point origine et une unité, tu sais que chaque point d'une droite peut être repéré par un nombre ; ce nombre s'appelle l'**abscisse** du point.
(*Voir l'idée de Dedekind en dernière page*.)



La règle des signes

Pourquoi $(-1) \times 1 = -1$?
Et pourquoi $(-1) \times (-1) = 1$?
En fait, il n'est pas difficile de montrer que ces règles de multiplication sont une simple conséquence de notre désir de tranquillité…
Lorsque nous calculons avec des nombres, nous voudrions que les règles de calcul soient les mêmes pour tous les nombres. Par exemple, en maths, on a décidé d'avoir « toujours » :

$$a \times 0 = 0, \quad a \times 1 = a$$
$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c),$$

qu'importe si a, b ou c sont positifs ou négatifs !
Voici comment nous écrivons cette formule :

$$\boxed{a} \times (\boxed{b} + \boxed{c}) = (\boxed{a} \times \boxed{b}) + (\boxed{a} \times \boxed{c})$$

19

?

1. Complète l'écriture suivante en écrivant -1 à la place de a, -1 a la place de b, et 1 à la place de c.

$$\boxed{-1} \times (\boxed{-1} + \boxed{1}) = (\boxed{} \times \boxed{}) + (\boxed{} \times \boxed{})$$

2. Souviens-toi alors que :
« – 1 » est le nom donné à l'opposé de 1 ;
ce qui signifie que (– 1) + 1 = 0.

En appliquant cette propriété à la formule que tu as complétée ci-dessus, écris ce que tu peux obtenir :

$$\boxed{-1} \times (\boxed{}) = (\boxed{-1} \times \boxed{-1}) + (\boxed{-1} \times \boxed{1})$$

N'oublie pas alors que $a \times 0 = 0$ et $a \times 1 = a$:

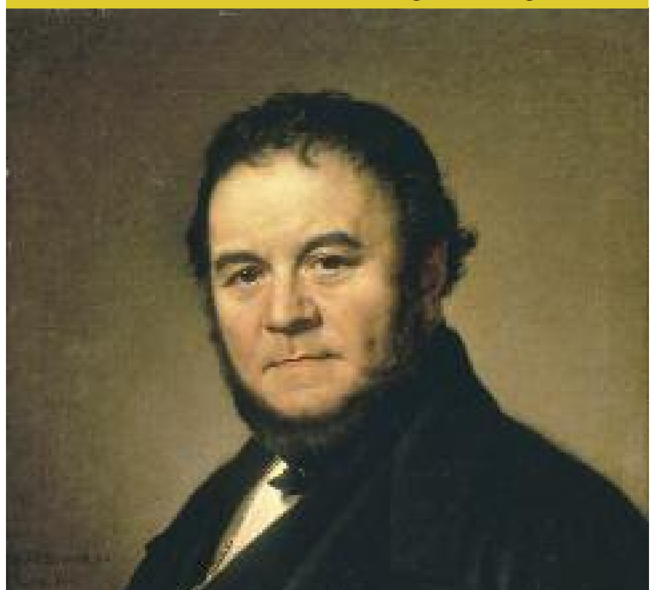
$$\boxed{} = (\boxed{-1} \times \boxed{-1}) + \boxed{}$$

Et cette dernière égalité montre que $(-1) \times (-1)$ est l'opposé de -1, soit 1.

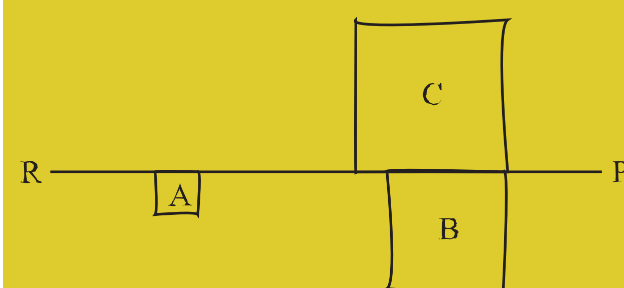
3. Lis le texte (amusant) encadré ci-contre.
Si tu avais été le professeur de Stendhal, aurais-tu pu lui dire quelque chose d'intéressant ?

Stendhal

L'écrivain Stendhal, auteur de ***La chartreuse de Parme*** (1839), ***Le rouge et le noir*** (1830), était “enthousiasmé” par les mathématiques. Cependant comme beaucoup d'entre nous, il avait parfois quelques difficultés de compréhension.
Voici un passage de la ***Vie de Henry Brulard***, l'un de ses romans autobiographiques, où il nous raconte ses démêlés avec la “règle des signes”…



Mon enthousiasme pour les mathématiques avait peut-être eu pour base principale mon horreur pour l'hypocrisie. […]
Mon grand malheur était cette figure :



Supposons que RP soit la ligne qui sépare le positif du négatif, tout ce qui est au-dessus est positif, comme négatif tout ce qui est au-dessous ; comment en prenant le carré B autant de fois qu'il y a d'unités dans le carré A, puis-je parvenir à faire changer de côté le carré C ?

Brunswick

1872

Ce que sont réellement les nombres

Richard Dedekind (1831-1916)

Le 26 avril 1872, le professeur Richard Dedekind fit à Brunswick une fantastique conférence « dédiée à son père bien aimé ». Fantastique car, pour la première fois au monde, il y énonçait une propriété des *nombres* qui permettait de comprendre ce qu'ils *étaient*. Plus tard, il écrira un livre développant ses idées sous le titre *Ce que sont et à quoi servent les nombres* (en allemand : *Was sind und was sollen die Zählen*).
Les nombres dont on parle ne sont évidemment pas que les nombres entiers : ce sont tous les nombres auxquels on peut penser, ceux qui servent pour compter, mesurer, repérer, estimer : 2 ou 365 mais aussi 1,62 ou – 9 ou aussi 1/3 ou encore π.

Une idée simple

L'idée de Richard Dedekind paraît très simple. « Mais, disait-il lui même, j'ai ainsi énoncé une caractéristique des nombres, utilisable comme base de déductions effectives. »
Il rappelle d'abord une évidente propriété d'une droite et de ses points :
Si tous les points d'une droite sont répartis en deux classes, de façon que tout point de la première classe est à gauche de tout point de la deuxième classe, alors il existe un et un seul point qui réalise cette découpe des points de la droite en deux classes.
Cette propriété, il propose tout simplement de l'énoncer dans le domaine des nombres… en remplaçant le mot *point* par le mot nombre, et *droite* par l'ensemble de tous les nombres :
Si tous les nombres sont répartis en deux classes, de façon que tout nombre de la première classe est plus petit que tout nombre de la deuxième classe, alors il existe un et un seul nombre qui réalise cette découpe de l'ensemble des nombres en deux classes.
Cet énoncé a d'importantes conséquences, par exemple, celle-ci…
Décidons de répartir les nombres en deux classes :
• ceux dont le carré est supérieur à 2,
• ceux dont le carré est inférieur à 2.
Alors, il existe un nombre qui réalise cette découpe en deux classes ; c'est évidemment le nombre dont le carré ne peut valoir que 2 exactement. Les mathématiciens notent ce nombre $\sqrt{2}$ et ils savent montrer que ce nombre ne peut s'écrire ni comme un décimal, ni comme une fraction ; mais, d'après l'idée de Richard, c'est un nombre comme les autres.
Ce que nous dit Richard Dedekind se résume finalement à ceci : **les nombres ne sont pas autre chose que les points d'une droite**. Et il justifie ainsi ce que nous faisons lorsque nous graduons une droite géométrique, c'est-à-dire lorsque nous associons un nombre à chaque point d'une droite et que chaque nombre est ainsi associé à un point.

Les 4 pages précédentes sont extraites de l'ouvrage
La longue histoire des nombres

ISBN : 978-2-87694-160-1

12 rue de l'épée de bois, Paris

www.mathkang.org

Solutions

18• La propriété des parts égales n'est vraie que pour des nombres positifs. Elle peut être fausse quand certains des nombres sont négatifs, en particulier, dans le cas présent, où $a = d =$ opposé de $b =$ opposé de c.
Il faut faire attention avec les nombres négatifs et l'ordre des nombres, on fait facilement des erreurs.

19• $(-1) \times (-1 + 1) = \big((-1) \times (-1)\big) + \big((-1) \times 1\big)$
donc $(-1) \times 0 = \big((-1) \times (-1)\big) + (-1)$ et $0 = \big((-1) \times (-1)\big) + (-1)$.
$(-1) \times (-1)$ est donc l'opposé de -1 qui est 1.