www.clubmaths.fr

ACTIVITÉ 4

Les bichoix

Sommaire

Activités-élèves :	pages 1 et 2
Qu'avez-vous appris ?	page 3
Réponses, solutions	pages 4 et 5
Notes pour le professeur	page 6

Matériel

papier brouillon
des objets pouvant se ranger en lignes (pièces, pions, haricots, …)
un jeu de dominos (éventuellement découpé dans la page donnée page 8)

Âge ou niveau

La combinatoire de tous les jours devrait évidemment être connue de tous les collégiens. Cette activité veut pallier ce regrettable défaut de présence dans les programmes officiels. Mais elle peut constituer une bonne introduction pour les grands écoliers aussi bien que pour les jeunes lycéens.

Ce document est réalisé en quatre "couleurs",

sur papier : gris foncé, gris souris, gris clair, sablé

sur écran : bleu, orange, vert, jaune

Licence

Le règlement des droits relatifs au téléchargement de ce document PDF ouvre droit

… à son impression par l'utilisateur défini lors du règlement

… à son utilisation dans le cadre défini lors de ce règlement

… à le photocopier à autant d'exemplaires que souhaité dans ce même cadre

Une copie numérique de ce fichier peut-être réalisée par sécurité, à l'exclusion d'aucune autre copie par quelque moyen et sur quelque support électronique que ce soit.

Le contenu de ce fichier est sujet aux habituels droits de protection des auteurs. En particulier :

© 2007 – ACL-Les Editions du Kangourou

12 rue de l'épée de bois, 75005 Paris

Les bichoix

Goûter de fête : tu as le droit de choisir **2 gâteaux différents parmi les 4** qui te sont proposés dans cette pâtisserie :

tarte

éclair

religieuse

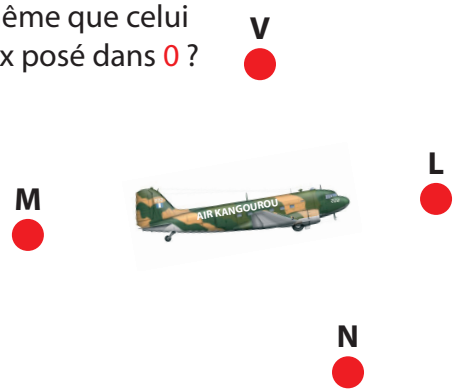
pudding

0 Combien de goûters différents pourrais-tu choisir ?

Pour sourire un peu, nous décidons de dire que tu dois faire, non pas un « choix », mais un « bichoix » ; c'est-à-dire que tu dois choisir non pas une seule chose mais deux différentes (comme une « bicyclette » est un engin à deux cycles, ou deux roues ; et un « bimoteur » est un avion à deux moteurs).

1 Liaisons entre points

Sur cette carte, tu vois quatre villes : Mathopolis, Villemathos, Logictown et NewCalculus.
On veut pouvoir aller en avion directement d'une ville à l'autre. Combien doit-on prévoir de lignes aériennes ?
Pourquoi ce problème est-il le même que celui du bichoix posé dans 0 ?

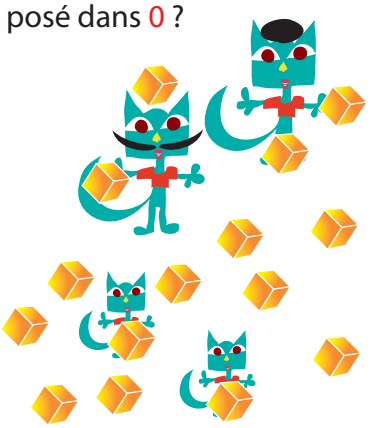


2 Poignées de mains

Albert, Becassine, Charles et Diana se rencontrent. Ils échangent tous entre eux une poignée de mains. Combien cela fait-il de poignéeS de mains ?
Pourquoi ce problème est-il le même que celui du bichoix posé dans 0.

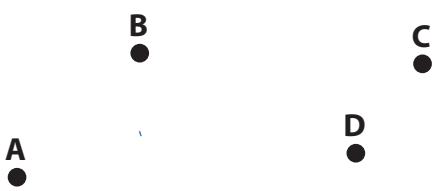
3 Cadeaux en famille

Papa, Maman, le Frère et la Sœur se retrouvent pour Noël ; chacun a apporté un cadeau pour chacun des autres.
Combien cela fait-il de cadeaux ?
Pourquoi ce problème est-il le même que celui du bichoix posé dans 0 ?



4 Côtés et diagonales

Marque 4 points A, B, C et D sur une feuille.
Trace tous les segments possibles d'un de ces points à un autre. Combien peux-tu en tracer ?
Pourquoi ce problème est-il le même que celui du bichoix posé dans 0 ?



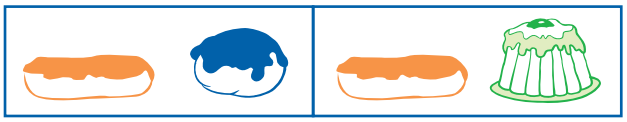
© 2007 – ACL-Les Éditions du Kangourou www.clubmaths.fr

Les bichoix

Pour compter le nombre de bichoix possibles avec 4 gâteaux, voilà comment Evariste s'est organisé

- *d'abord le choix de deux gâteaux dont une tarte (il y en 3),*

- *puis les bichoix sans tarte mais avec un éclair (il y en 2),*



- *enfin les bichoix sans tarte ni éclair avec une religieuse (il n'y en a qu'un).*

Et 3 + 2 + 1 = 6.

5 Et avec 5 objets

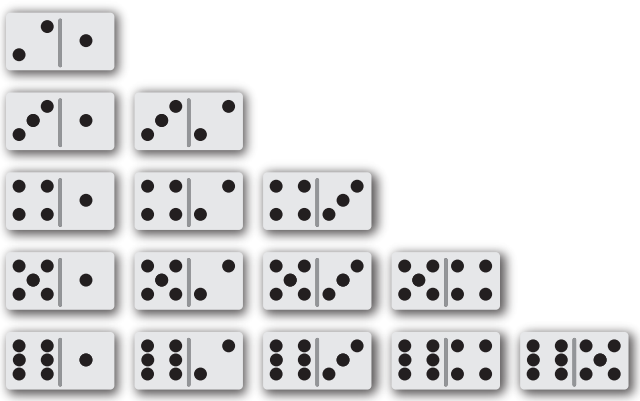
Maintenant le patissier te propose un cinquième gâteau :
un savarin

Tu peux donc faire ton bichoix parmi 5 gâteaux.
Tu connais le nombre de tes bichoix sans le savarin.
Combien as-tu de choix supplémentaires avec le savarin ?
Combien de bichoix de gâteaux peux-tu faire parmi 5 gâteaux ?

Comme dans les activités 1 à 4, invente des situations dans lesquelles il y a un bichoix à faire parmi 5 choses ou personnes.

6 Combien de dominos ?

Prends un jeu de dominos, enlève les doubles et les "zéros" et range les comme nous les avons rangés et tu peux prendre un vrai jeu de dominos au lieu de découper la planche donnée page 5.
Combien comptes-tu de dominos différents ?
Remarque ceci : choisir un domino, c'est choisir deux nombres différents parmi 1, 2, 3, 4, 5, 6.



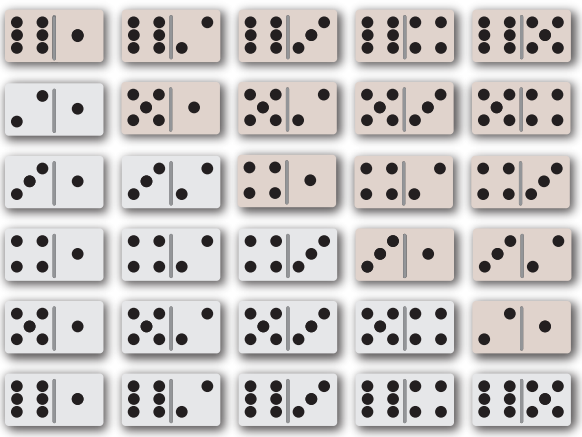
© 2007 – ACL-Les Éditions du Kangourou www.clubmaths.fr

Les bichoix

7 Et avec 6 objets

Dans l'activité précédente, tu t'es certainement servi de la disposition des dominos pour les compter.
Ainsi en les comptant ligne par ligne, tu en trouves : 1 + 2 + 3 + 4 + 5.

1. Voici encore une autre manière de compter ces dominos : avec un(e) ami(e) prends deux jeux de dominos et disposez-les en tableau comme nous l'avons fait (en coloriant les deux jeux différemment).

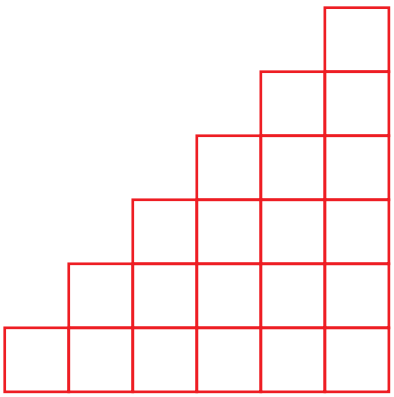


Le nombre de dominos de ces deux jeux est très facile à compter, car ils sont disposés en rectangle. Combien en comptes-tu ? Retrouves-tu alors le nombre de dominos (sans zéros ni doubles) dans un jeu ?

2. Prends maintenant un jeu de dominos complet, avec les zéros et les doubles.
Combien y a-t-il de dominos dans un vrai jeu ?
Compare ce nombre avec celui des bichoix parmi 7 objets (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6).

8 Combien de blocs ?

L'activité 7 t'a montré un truc assez extraordinaire au sujet de laquelle nous voulons te raconter l'histoire d'un jeune garçon de 9 ans : celle de Karl-Friedrich Gauss.
Tu peux lire, si tu veux, les feuilles I, II et III.Si tu as compris l'astuce du jeune Gauss, tu devrais réussir à résoudre les difficiles problèmes suivants.
1. La construction de l'escalier à 6 marches, dessiné ici, a nécessité 15 blocs carrés.
Combien de blocs devraient être utilisés pour un escalier analogue de 100 marches ?

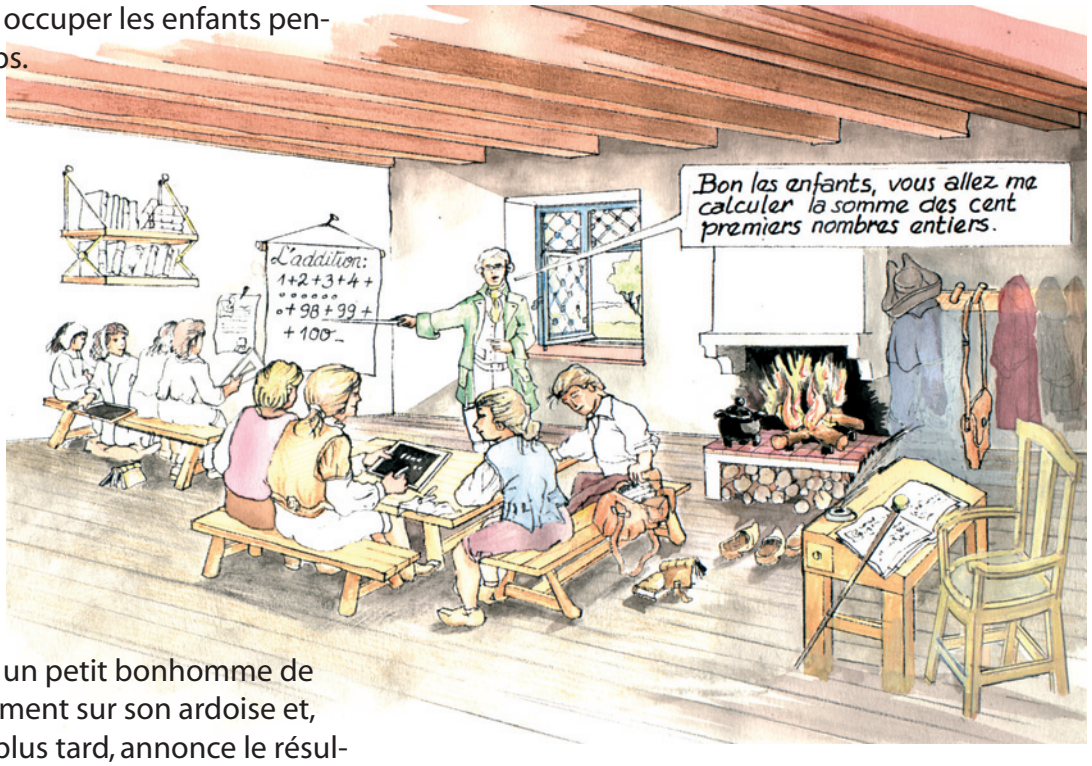


2. Alors : nous t'avons déjà fait remarqué le lien entre le nombre de bichoix (parmi un certain nombre d'objets) et la somme des premiers nombres
1 + 2 + 3 + … + jusqu'au nombre d'objets.
Et grâce à l'image de l'escalier tu peux comprendre que ce nombre vaut aussi la moitié du nombre d'objets multiplié par le nombre d'objets plus 1.
On a marqué 100 points sur une feuille ; et on voudrait tracer tous les segments qui joignent les points deux à deux.
Combien de segments devrait-on tracer ?

© 2007 – ACL-Les Éditions du Kangourou www.clubmaths.fr

Karl Friedrich GAUSS, le petit prince des mathématiques

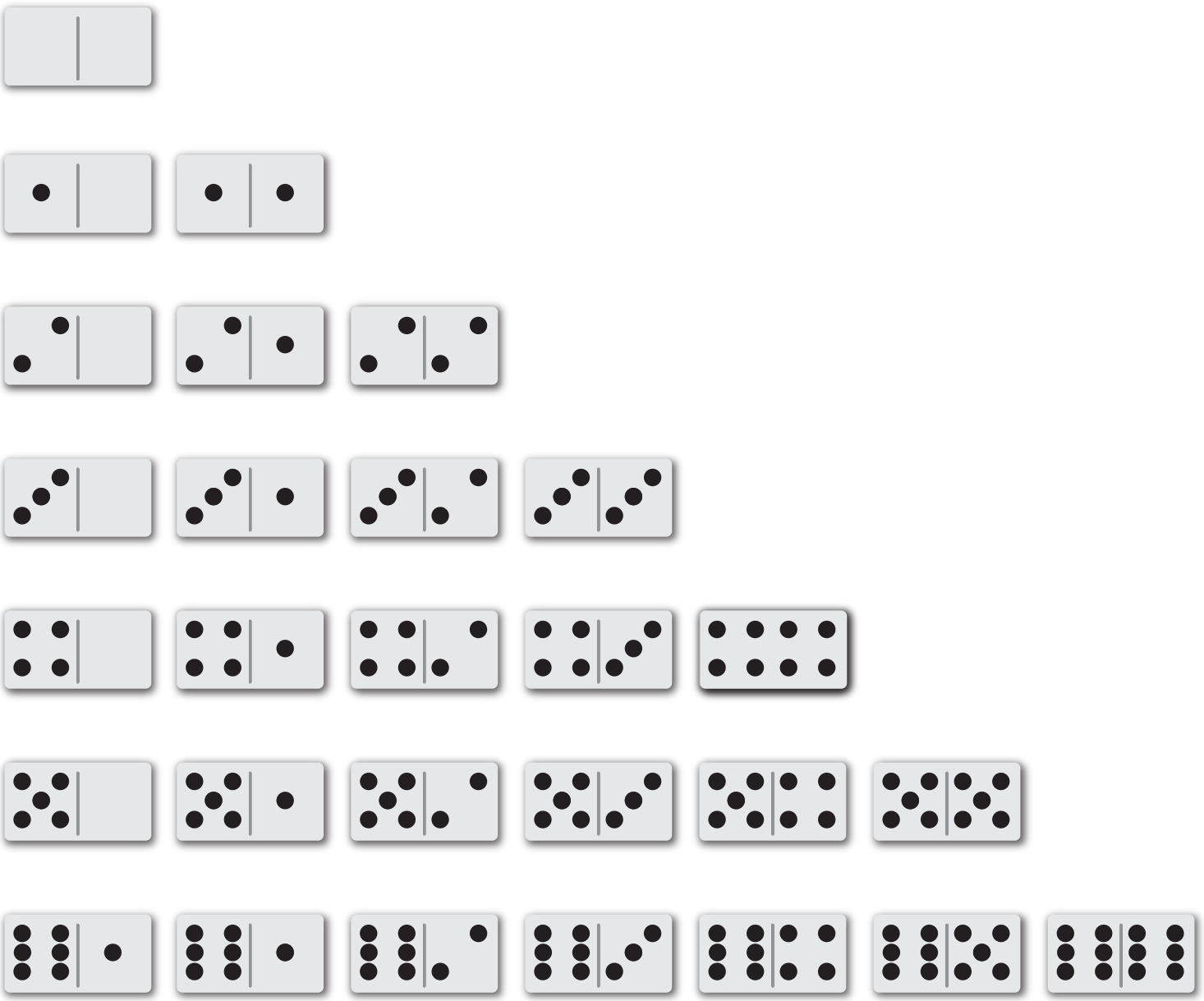
La scène se passe en 1785 dans une école de Brunswick, en Basse-Saxe. L'instituteur propose un calcul qui devrait occuper les enfants pendant un certain temps.



Karl Friedrich Gauss, un petit bonhomme de huit ans, écrit fébrilement sur son ardoise et, quelques secondes plus tard, annonce le résultat !

© 2007 – ACL-Les Éditions du Kangourou www.clubmaths.fr

Les 28 dominos



© 2007 – ACL-Les Éditions du Kangourou www.clubmaths.fr

Les bichoix

Qu'as-tu appris ?

Lors de ces activités, tu as appris ceci :

« Il faut essayer de diviser un problème posé en autant d'étapes que cela est possible et que cela parait utile pour le mieux résoudre.»

Ce conseil est un de ceux qui t'est donné par René Descartes, dans son « Discours de la méthode », imprimé en 1636. Ce discours, très connu en France, explique comment t'organiser pour résoudre les problèmes qui peuvent t'être proposés.

Par exemple, dans l'activité 0, il te faut compter un certain nombre de possibilités. Pour organiser le compte des choix possibles, tu as intérêt à décomposer tes choix en étapes successives : ainsi tu peux décider de choisir **d'abord** le premier gâteau ; tu as 4 choix pour ce premier gâteau ; et **ensuite** de te demander combien tu as de choix pour le deuxième…

Certaines situations se ressemblent tellement que tu n'as pas besoin de recommencer ton raisonnement pour résoudre un deuxième problème : un même calcul peut servir pour des activités différentes.

Par exemple, les activités 1, 2, 3, 4 ressemblent toutes à la première, de sorte que les résultats sont les mêmes. Pour mieux comprendre l'identité de ces situations, on a intérêt à faire un discours utilisant des mots « neutres » du genre « chose » ou « éléments » comme « le nombre de bichoix parmi 4 choses est six », que ces choses soient des gâteaux, des personnes, des points ou des villes …

Lorsque des objets peuvent se disposer en lignes et en colonnes pour former un rectangle, leur compte est très simple : lorsque le rectangle a x lignes et y colonnes, le nombre de cases est le produit $x \times y$.

Par exemple, dans l'activité 7, il est facile de compter le nombre des dominos disposés en rectangle.

Un truc utile

Pour additionner des nombres consécutifs, on a intérêt à les additionner deux fois : en les écrivant une fois dans l'ordre croissant et, une autre fois, en dessous, dans l'ordre décroissant ; chaque couple de nombres écrits l'un en dessous de l'autre égale la même somme.

Par exemple, c'est ainsi que le jeune Gauss a étonné son instituteur (voir la b. d.) :

$$\begin{array}{r} 1+2+3+4+5+6 \\ +\,6+5+4+3+2+1 \\ \hline 7+7+7+7+7+7 = 6\times 7 = 42 \end{array}$$

Donc $1+2+3+4+5+6 = 42 / 2 = 21$.

Ce truc peut se traduire par une formule qui sera peut-être la première formule mathématique que tu connaîtras :

$$\mathbf{1+2+3+4+\ \ldots\ +n\ =\ n\times(n-1)/2}$$

Notes
pour le professeur

L'une des caractéristiques des mathématiques, c'est de pouvoir représenter des situations diverses par un même modèle de façon à pouvoir exploiter ce même modèle dans des circonstances différentes, sans avoir à refaire, ni les mêmes raisonnements, ni les mêmes calculs.
C'est évidemment pour habituer les élèves à cette merveilleuse capacité que les exemples 1 à 5 ont été donnés.

Le comptage de tous les bichoix possibles n'est pas vraiment difficile, mais il faut sûrement guider les élèves dans leur recherche ; en particulier, il faut leur demander d'expliciter leur manière de compter. Un bon moyen consiste à les laisser chercher en groupe, puis de demander à leur représentant de dire comment ils ont procédé, les autres groupes critiquant et apportant leurs propres remarques.

Pour la première un bon schéma de comptage devrait finalement ressembler à ceci.

Si je choisis l'éclair, alors il me reste 3 choix possibles pour l'autre gâteau : (éclair, mille-feuilles) (éclair, tarte) (éclair, opéra).
Il ne faut pas hésiter à écrire ou à faire écrire explicitement ces trois bichoix ; en effet, on prête trop souvent à l'élève une capacité d'abstraction qui n'est pas la sienne. Ici, en particulier, se contenter de dire que « il y a trois choix possibles en plus de l'éclair » ne suffit pas forcément.
C'est alors qu'un enseignant-meneur doit être attentif au fait qu'il y a DEUX schémas de raisonnement très différents pouvant être suivis par les enfants ; il faut donc bien les repérer et bien les suivre dans leur démarche (en essayant, si c'est possible, de favoriser la première, qui est plus facile à communiquer et à suivre jusqu'au bout, même si elle ne débouche pas directement sur une formule simple).

Démarche 1 : dans cette démarche, les différents gâteaux joue des rôles dissymétriques ; l'éclair figurant dans les premiers bichoix ne sera plus choisi ensuite.
Si je ne choisis pas l'éclair, alors . . .
. . . si je choisis le mille-feuilles, il me reste 2 choix possibles pour l'autre gâteau :
(mille-feuilles, tarte) (mille-feuille, opéra).
Et, si je ne choisis ni l'éclair, ni le mille-feuilles, alors . . .
. . . il me reste1 seul bichoix possible : (tarte, opéra).
Le nombre total de bichoix possibles est donc de $3 + 2 + 1$, soit 6.

Démarche 2 : dans cette démarche, on fait, sur chaque gâteau, le même raisonnement ; mais il y a une subtilité à comprendre (choisir G1 puis G2 aboutit au même bichoix que G2 puis G1).
Si je choisis le mille-feuilles, alors il me reste 3 choix possibles pour l'autre gâteau :
(mille-feuilles, éclair) (mille-feuilles, tarte) (mille-feuilles, opéra) .
Si je choisis la tarte, alors il me reste 3 choix possibles pour l'autre gâteau :
(tarte, éclair) (tarte, mille-feuilles) (tarte, opéra) .
Si je choisis l'opéra, alors il me reste 3 choix possibles pour l'autre gâteau :
(opéra, éclair) (opéra, mille-feuilles) (opéra, tarte) .
Alors, le nombre de bichoix possibles est $3 + 3 + 3 + 3$. Et cela fait donc 4×3, soit 12.
Mais, dans ce comptage on voit que chaque bichoix est trouvé 2 fois. Par exemple les bichoix (éclair, mille-feuilles) et (mille-feuilles, éclair) se trouvent une fois lorsqu'on commence par choisir l'éclair et une deuxième fois lorsqu'on commence par choisir le mille-feuilles. De sorte que le nombre de bichoix doit être divisé par deux ; $12/2 = 6$; le résultat est donc 6 bichoix ; et on retrouve d'ailleurs le nombre en en dressant la liste.

© 2007 – ACL-Les Éditions du Kangourou www.clubmaths.fr

Les bichoix

L'idéal serait que les recherches des élèves en groupe débouchent sur des démarches différentes permettant de revenir sur les deux principales lors d'une mise en commun collective. Sinon, l'enseignant devra savoir orienter les élèves vers les pistes qui amènent à l'une ou à l'autre.

La première démarche donne le nombre de bichoix parmi n objets possibles égal à

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ \ldots\ + n.$$

La deuxième donne la formule directe

$$n \times (n - 1) / 2.$$

Stimulez la créativité des élèves, en faisant contrôler cette créativité.

Il est très intéressant de demander aux élèves d'inventer une situation du type de celles que nous avons proposées :

Inventer une histoire dans laquelle quelqu'un se trouve devant un certain nombre de bichoix.

Par exemple, choisir deux cartes dans un jeu, deux mois dans l'année, deux individus particuliers dans une équipe, deux villes dans une région,…

(Attention alors à bien contrôler la pertinence de la situation, en particulier à l'importance éventuelle de l'ordre des choix !)

Développement supplémentaire éventuel

Selon l'habitude des élèves et leur réceptivité à une argumentation logiquement enchaînée, on pourra leur expliquer comment les différents couples d'éléments d'un ensemble se rangent et s'organisent dans un carré.

On peut ranger des dominos marqués de 1 à 6, ou des couples de personnes : par exemple A, B, C, D, E et F forment un club et on doit choisir le président et le trésorier ; il y a 6×6 possibilités de choix que l'on peut ranger en carré.

	colonne 1	colonne 2	colonne 3	colonne 4	colonne 5	colonne 6
ligne 1	**1,1**	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
ligne 2	2,1	**2,2**	2,3	2,4	2,5	2,6
ligne 3	3,1	3,2	**3,3**	3,4	3,5	3,6
ligne 4	4,1	4,2	4,3	**4,4**	4,5	4,6
ligne 5	5,1	5,2	5,3	5,4	**5,5**	5,6
ligne 6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	**6,6**

Il y a, en tout, 6×6, soit 36 possibilités, représentés par toutes les cases du carré (dans le cas général de n objets, il y a $n \times n$ couples).

Parmi ces couples, ceux qui sont sur la diagonale du carré correspondent à un choix du même élément pour les deux choix (le président est aussi trésorier) ; ces couples sont ici coloriés en foncé, au nombre de 6 (dans le cas général il y a n « doubles »).

Les autres couples sont donc 30 ; c'est le nombre de choix possibles pour un couple ordonné (dans le cas général , il y en a $n \times n - n = n \times [n - 1]$).

Le nombre de paires correspondant à ce que nous avons appelé un « bichoix » est égal à la moitié de ce nombre, soit 15, ici coloriés en gris souris ou en gris clair (dans le cas général, il y en a $n \times [n - 1]/2$).

Il est évidemment tentant de faire découvrir aux élèves l'égalité de ces nombres. On pourra alors raconter l'histoire bien connue du jeune Karl Friedrich Gauss qui découvrit cette égalité à neuf ans et proposer l'activité 6, en distribuant la relation de cette histoire.